

極小曲面方程式と平均曲率零曲面方程式の 解に対する Wick 回転について

赤嶺新太郎* (九州大学大学院数理学府)

概要

3次元ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の極小曲面と3次元ミンコフスキー空間 \mathbb{L}^3 内の空間的な平均曲率零曲面 (極大曲面) の方程式

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0, \quad (1)$$

$$(1 - g_y^2)g_{xx} + 2g_x g_y g_{xy} + (1 - g_x^2)g_{yy} = 0, \quad 1 - g_x^2 - g_y^2 > 0 \quad (2)$$

の解の間には、カラビ対応と呼ばれる双対性 [1] があり、両者の間には変換があることが知られている。ここで空間的な曲面とは、リーマン計量を持つ曲面のことをいうが、他方で \mathbb{L}^3 内の平均曲率零曲面には、ローレンツ計量を持つ時間的なものや、一つの曲面上で空間的領域、時間的領域の両方を持つ混合型曲面もあり、これまでに活発に研究されてきた。

本講演では、上記の方程式の実解析的な解の間にカラビ対応とは異なる対応を与える方法として、物理学でしばしば用いられる Wick 回転と呼ばれる実変数を虚変数に取り替える操作を用いた方程式の解の変換を与える。さらに (2) の方程式とは別の平均曲率零曲面の方程式

$$(1 - h_t^2)h_{xx} + 2h_t h_x h_{tx} - (1 + h_x^2)h_{tt} = 0 \quad (3)$$

を経由させることで、方程式3つ組に対する解の変換を与える。Wick 回転による変換は、時間的な曲面や計量が退化する光的な点を持つ曲面に対しても有効なため、応用として、Klyachin[4]の研究を始め、近年 [2, 3, 5]などで研究されている退化光点 (degenerate lightlike points) と呼ばれる、等温座標を用いた曲面の枠組みでは考察することが出来ない特異性を持った曲面の間の変換を考察することができる。講演では、特異性を持った平均曲率零曲面に関する研究を適宜紹介しつつ、上記の Wick 回転による変換のアイデアを説明したい。本講演の内容は Harish-Chandra Research Institute の Rahul Kumar Singh 氏との共同研究に基づく。

参考文献

- [1] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, in Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, CA, 1968), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 223–230.
- [2] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, H. Takahashi, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in \mathbb{L}^3 containing a light-like line*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. **350** (2012), 975–978.
- [3] S. Fujimori, Y.W. Kim, S.-E. Koh, W. Rossman, H. Shin, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *Zero mean curvature surfaces in Lorenz-Minkowski 3-space which change type across a light-like line*, Osaka J. Math. **52** (2015), 285–297.
- [4] V.A. Klyachin, *Zero mean curvature surfaces of mixed type in Minkowski space*, Izv. Math. **67** (2003), 209–224.
- [5] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski 3-space with applications*, preprint, arXiv:1707.07396.

*本研究は JSPS 科研費 JP15J06677 の助成を受けたものである。