deformed Donaldson-Thomas 接続について

河井　公大朗
(山本　光（筑波大学）氏との共同研究に基づく)

大阪公立大学

ホロノミー群

ホロノミー群 $\mathrm{Hol}(g)$……リーマン多様体 (M, g) の「曲がり方」を調べる方法のひとつ

Theorem (Berger, 1955)

(M, g) を単連結リーマン多様体で、既約（局所的にリーマン多様体の直積に分解しない）かつ局所対称空間でない $(\nabla R \neq 0)$ とする。このときホロノミー群は

$$\mathrm{SO}(n),\ \mathrm{U}(n),\ \mathrm{SU}(n),\ \mathrm{Sp}(n)\mathrm{Sp}(1),\ \mathrm{Sp}(n),\ G_2,\ \mathrm{Spin}(7)$$

のいずれかになる。

G_2 幾何

$$G_2 := \mathrm{Aut}(\mathbb{O}) \qquad : \mathbb{O} \text{ の積を保つ}$$

$\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$ とみて $\mathbb{O}$ の積を $\varphi_0 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ で表現：

$$\mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \ni (u, v) \mapsto \varphi_0(u, v, \cdot)^\sharp \in \mathbb{R}^7 \qquad (u \perp v).$$

このとき

$$G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}) \mid g^*\varphi_0 = \varphi_0\} \subset \mathrm{SO}(7).$$

- $\mathrm{Hol}(g) \subset G_2 \Longrightarrow \exists \varphi \in \Omega^3(X^7)$ s.t. $\nabla\varphi = 0$.
- この $\varphi \in \Omega^3(X^7)$ を 1 つ固定して (X^7, φ, g) を G_2 多様体とよぶ。
- G_2 幾何：3-form φ で特徴づけられる幾何

G_2 幾何の捉え方

$$\begin{tikzcd} & \{G_2 \text{ 多様体}\} & \\ \{\text{CY 3-mfd}\} \arrow[ur, "\text{類似}"] & & \{3,4 \text{ 次元多様体}\} \arrow[ul, "\text{高次元化}"'] \end{tikzcd}$$

- Calabi-Yau 3-mfd の類似（$\mathrm{SU}(3) \subset G_2$）
  Y^6: Calabi-Yau 3-mfd $\Longrightarrow S^1 \times Y^6$: G_2 多様体
- 3,4 次元多様体の理論の高次元化？
  - Chern-Simons 理論 (3-mfd, 平坦接続)
  - Donaldson 理論（4-mfd, ASD 接続）

$\rightsquigarrow$ G_2-instanton

Calibrated geometry [Harvey-Lawson, 1982]

- calibration：リーマン多様体 (X^n, g) 上のある条件をみたす閉微分形式 $\varphi \in \Omega^k(X^n)$ のこと。
- calibration $\Rightarrow$ calibrated submanifold
  - コンパクトなものは、ホモロジー類の中で体積最小で、体積は位相的に与えられる。

$\mathrm{Hol}(g)$ $(\subset)$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{SU}(n)$	G_2
(X, g)	X^{2n}:Kähler	X^{2n}:Calabi-Yau	X^7 : G_2 多様体
calibrated submfd.	N^{2k}:複素部分多様体	L^n:特殊ラグランジュ部分多様体	A^3:associative 部分多様体 C^4:coassociative 部分多様体

- 赤字：変形に障害あり。青字：変形に障害なし。

calibrated submanifold を用いて、元の多様体を理解できるか？

- Gromov-Witten 不変量：概正則曲線を「数える」
  $\rightsquigarrow$ associative を数える？
-
  - Casson 不変量：平坦接続を数える
  - Donaldson 不変量：ASD 接続を数える

  $\rightsquigarrow$ G_2-instanton を数える？
- Calabi-Yau のミラー対称性 $\rightsquigarrow$ G_2 多様体のミラー対称性？

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{G_2 \text{ 多様体}\} & \\ \{\text{CY 3-mfd}\} \arrow[ur, "\text{類似}"] & & \{3,4 \text{ 次元多様体}\} \arrow[ul, "\text{高次元化}"'] \end{tikzcd}$$

ミラー対称性

- Strominger–Yau–Zaslow (SYZ conjecture):
  3 次元 Calabi-Yau のミラー対称性は（特異ファイバーを含む）特殊ラグランジュ(SL) dual T^3-fibration で説明できる？

$$\begin{array}{ccc} X^6 & & (X^6)^* \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f^*} & \\ & B^3 & \end{array}$$

  smooth fiber $f^{-1}(b), (f^*)^{-1}(b)$ は "dual" SL T^3.

- Leung–Yau–Zaslow:
  SL dual T^3-fibration が与えられたとき、実フーリエ・向井変換により SL 部分多様体 は deformed Hermitian Yang–Mills (dHYM) 接続に対応する。

同様の話が G_2 多様体にもある。

- Lee–Leung:
  coassociative dual T^4-fibration が与えられたとき、実フーリエ・向井変換により associative 部分多様体 は deformed Donaldson–Thomas (dDT) 接続に対応する。

calibrated submanifold	“mirror”
special Lagrangian	dHYM connection
(co)associative	dDT connection

Definition

- (X^7, φ, g): G_2 多様体
- $(L, h) \to X^7$:複素エルミート直線束

(L, h) のエルミート接続 ∇ が deformed Donaldson–Thomas (dDT) 接続 (deformed G_2-instanton) とは

$$\frac{1}{6}F_\nabla^3 + F_\nabla \wedge *\varphi = 0$$

をみたすときをいう。ここで $F_\nabla = d_\nabla \circ d_\nabla \in \sqrt{-1}\Omega^2$ は ∇ の曲率。

- dDT 接続は、G_2-instanton (Donaldson–Thomas connection: $F_\nabla \wedge *\varphi = 0$) の類似とも思える。
- dDT 接続は、associative 部分多様体や G_2-instanton と似た振る舞いをすると期待される。

dHYM $\Rightarrow$ dDT

- $(Y^6, \omega, g, J, \Omega)$: Calabi–Yau 3-mfd
- $(L, h) \to Y^6$:複素エルミート直線束

このとき $X^7 := S^1 \times Y^6$ は G_2 多様体になり G_2 構造 $\varphi \in \Omega^3(X^7)$ は

$$\varphi = dx \wedge \omega + \mathrm{Re}\,\Omega, \qquad *\varphi = \omega^2/2 - dx \wedge \mathrm{Im}\,\Omega$$

で与えられる。$\pi : X^7 \to Y^6$ を射影とする。

Lemma

∇ を (L, h) の *dHYM* 接続 *(i.e.* $F_\nabla^{0,2} = \mathrm{Im}\,(\omega + F_\nabla)^3 = 0$*)* とする。このとき $\pi^*\nabla$ は $\pi^* L$ の *dDT* 接続。

これは次からわかる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} F_\nabla^3 + F_\nabla \wedge *\varphi =& \frac{1}{6}\left(F_\nabla^3 + 3F_\nabla \wedge \omega^2\right) - dx \wedge F_\nabla \wedge \mathrm{Im}\,\Omega, \\ \sqrt{-1}\mathrm{Im}\,(\omega + F_\nabla)^3 =& F_\nabla^3 + 3F_\nabla \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Y^6 がコンパクト連結なら「逆」もいえる。

$$
\begin{tikzcd}
\{\text{dHYM 接続}\} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{ミラー}"'] & \subset & \{\text{dDT 接続}\} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{ミラー}"'] \arrow[rd, leftrightarrow, "\text{類似}"] & \\
\left\{\begin{array}{c}\text{SL}\\ \text{部分多様体}\end{array}\right\} & \subset & \left\{\begin{array}{c}\text{associative}\\ \text{部分多様体}\end{array}\right\} & \{G_2\text{-instantons}\} \\
 & & \text{GW の類似？} \arrow[u, dotted] & \text{高次元ゲージ理論？} \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}
$$

- dDT も「数えて」不変量が作れる？
  - モジュライ（変形）理論は？associative, G_2-instanton とどれほど類似性がある？
  - $\Rightarrow$ まず類似の性質をもつかチェック。
- dDT の研究を発展させて、逆に associative, G_2-instanton のことがわかる？

associative 部分多様体の性質

- G_2 構造を摂動すると、モジュライ空間は 0 次元向きづけ可能多様体。
- associator equality $\Rightarrow$ G_2 構造は calibration & associative 部分多様体の（変形理論に有用な）特徴づけ。
- ホモロジー類の中で体積最小で、体積は位相的に与えられる。
- Chern-Simons 型汎関数の臨界点。

(実は G_2-instanton も類似の性質をもつ。)

Theorem (K.-Yamamoto)

dDT 接続は上と類似した性質をもつ (最後は [Karigiannis-Leung])。

変形理論

Theorem (K.-Yamamoto)

1. dDT 接続のモジュライ空間の *expected dimension* $= b^1$.
2. G_2 構造 φ を摂動すると、モジュライ空間は b^1 次元の滑らかな多様体になる。
3. 変形の障害がない場合、モジュライ空間は自然な向きをもつ(大域的な性質)。

(各 dDT 接続 ∇ に対して複体 $(\#_\nabla)$ が定義できる。$(\#_\nabla)$ はある楕円型複体の部分複体で、dDT 接続の変形は $(\#_\nabla)$ を用いて記述できる。)

接続の「体積」

- (X^n, g): コンパクト連結向きづけ可能リーマン多様体
- $(L, h) \to X^n$: 複素エルミート直線束
- $\mathcal{A}_0 := \{(L, h)$ のエルミート接続$\}$.

“volume functional” $V : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ を次で定義する。

$$V(\nabla) := \int_X v(\nabla)\mathrm{vol}_g,$$

$$v(\nabla) := \sqrt{1 + |F_\nabla|^2 + \left|\frac{F_\nabla^2}{2!}\right|^2 + \left|\frac{F_\nabla^3}{3!}\right|^2 + \cdots}$$

- 実フーリエ・向井変換で、V は部分多様体の（通常の意味での）体積に対応する。
- 物理では、V は Dirac-Born-Infeld (DBI) action とよばれる。

Theorem (“Mirror” of associator equality, K.-Yamamoto)

G_2 多様体上、任意の $\nabla \in \mathcal{A}_0$ に対して

$$\left(1+\frac{1}{2}\langle F_\nabla^2, *\varphi\rangle\right)^2 + \left|*\varphi \wedge F_\nabla + \frac{1}{6}F_\nabla^3\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\varphi \wedge *(F_\nabla)^2\right|^2 = v(\nabla)^2.$$

特に任意の $\nabla \in \mathcal{A}_0$ に対して

$$\left|1+\frac{1}{2}\langle F_\nabla^2, *\varphi\rangle\right| \le v(\nabla), \qquad \text{等号成立} \Longleftrightarrow \nabla : dDT.$$

- $*\varphi \wedge F_\nabla + \frac{1}{6}F_\nabla^3 = 0 \Rightarrow \varphi \wedge *(F_\nabla)^2 = 0.$
- これは (通常の) associator equality の実フーリエ・向井変換により予測された。証明は pointwise な計算だが、結構な工夫が必要。(おそらく実フーリエ・向井変換なしには発見不可。)
- これよりコンパクト連結な G_2 多様体上で dDT 接続 ∇ は $V : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ の最小を与え、$V(\nabla)$ は位相的に与えられる。 $\left(\int_X \left(1+\frac{1}{2}\langle F_\nabla^2, *\varphi\rangle\right)\mathrm{vol} = \mathrm{Vol}(X) + \left(-2\pi^2 c_1(L)^2 \cup [\varphi]\right)\cdot[X]\right)$

Corollary

$L \to X^7$ が平坦とする。このとき任意の dDT 接続は平坦。特に、dDT 接続のモジュライ空間 $= H^1(X,\mathbb{R})/2\pi H^1(X,\mathbb{Z})$.

∇_0 を平坦接続とし ∇ を任意の dDT 接続とすると

$$\int_X \sqrt{1+|F_\nabla|^2+\left|\frac{F_\nabla^2}{2!}\right|^2+\left|\frac{F_\nabla^3}{3!}\right|^2}\,\mathrm{vol}_g = V(\nabla) = V(\nabla_0) = \int_X \mathrm{vol}_g.$$

これより $F_\nabla = 0$ がわかる。

Remark

コンパクト連結な G_2 多様体上で非自明な例を構成するならば、平坦でない直線束 $L \to X^7$ をとる必要がある。(*cf. Lotay-Oliveira* はある *coclosed* G_2 構造をもつ *7-mfd.* の平坦束上で具体例を構成した。)

変分法的観点 ([Karigiannis-Leung])

- (X^7, φ, g): コンパクト連結 G_2 多様体
- $(L, h) \to X$:複素エルミート直線束
- $\mathcal{A}_0 := \{(L, h)$ のエルミート接続$\}$

$\mathcal{A}_0$ 上の 1-form Θ を

$$\Theta_\nabla(\sqrt{-1}b) = \int_X \sqrt{-1}b \wedge \left(\frac{1}{6}F_\nabla^3 + F_\nabla \wedge *\varphi\right)$$

$(\nabla \in \mathcal{A}_0, \sqrt{-1}b \in T_\nabla\mathcal{A}_0 = \sqrt{-1}\Omega^1)$ で定義する。このとき

$$\Theta_\nabla = 0 \iff \nabla : \mathrm{dDT}.$$

実は Θ は closed である。$\mathcal{A}_0 = \nabla + \sqrt{-1}\Omega^1 \cdot \mathrm{id}_L$ $(\nabla \in \mathcal{A}_0$: fixed$)$ は可縮なので $\exists CS : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ s.t. $dCS = \Theta$. よって
dDT 接続は CS (Chern-Simons 型汎関数) の臨界点になる。

まとめ

{dHYM 接続} ⊂ {dDT 接続}

ミラー　　　ミラー　　　類似

{SL 部分多様体} ⊂ {associative 部分多様体}　　{G_2-instantons}

GW の類似？　　高次元ゲージ理論？

- dDT を「数えて」不変量が作れる？
- dDT の研究を発展させて、逆に associative, G_2-instanton のことがわかる？

まとめ

dDT 接続は以下のような associative 部分多様体や G_2-instanton に類似した性質をもつ。

- G_2 構造を摂動すると、モジュライ空間は b^1 次元向きづけ可能多様体。
- ミラー associator equality がある。
- dDT 接続は「体積」$V : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ を最小にし、その量は位相的に与えられる。
- Y^6:Calabi-Yau, $(L, h) \to Y^6$:複素エルミート直線束、$\pi : X^7 = S^1 \times Y^6 \to Y^6$ のとき、$\pi^* L$ の任意の dDT 接続は dHYM (modulo closed 1-forms).
- dDT 接続は Chern-Simons 型汎関数の臨界点 ([Karigiannis-Leung])。

(Chern-Simons 以外は、同様の主張が Spin(7) 多様体に対しても成り立つ。)

今後の課題

- 他にも類似した性質を示せるか？(by 実フーリエ・向井変換？)
- コンパクト G_2 多様体上での dDT 接続の例の構成 (非平坦な直線束をとる必要あり。)
- "Singular" dDT 接続？コンパクト性定理？
  - ゲージ理論 の類似？[Uhlenbeck, Price, Nakajima, Tian]
- instanton Floer homology (for 3-manifolds) の類似？
  - （$\mathcal{A}_0$ のある開集合上のある計量に関する）CS の gradient flow equation が、$\mathbb{R} \times X^7$ 上の $\mathrm{Spin}(7)$-dDT equation に一致することは示せた。

- 極小接続
  - ∇: 極小 $\Longleftrightarrow$ ∇ が「体積」V の臨界点 $\Longleftrightarrow$ $\delta_\nabla F_\nabla = 0$.
    - δ_∇: 余微分のような作用素
    - Yang-Mills 接続と同様の特徴づけ
  - $\Delta_\nabla := d\delta_\nabla + \delta_\nabla d$ はよい性質を持つ
    - ∇:極小 $\Longrightarrow \Delta_\nabla F_\nabla = 0$
    - ∇:極小ならば「部分積分公式」が成り立つ

$$\int_X (\Delta_\nabla f_1)\cdot f_2 \cdot v(\nabla)\mathrm{vol}_g = \int_X f_1 \cdot (\Delta_\nabla f_2)\cdot v(\nabla)\mathrm{vol}_g \qquad (\forall f_1, f_2 \in \Omega^0)$$

    - $\Longrightarrow$ 単調性公式
      "$\frac{1}{r}\int_{B(x,r)} \tilde{v}(\nabla)\mathrm{vol}_g$" は r について単調増加
  - 極小接続の曲率は「保存則」を満たす。
    - Yang-Mills 接続の曲率は、「保存則」を満たすことが知られている。調和写像にも類似の主張がある。