Riemann 多様体間の写像の第二基本形式から定まる積分不変量の変分問題に関する諸結果

秋山 梨佳 (東京都立大学)
joint work with 酒井高司 (東京都立大学), 佐藤雄一郎 (工学院大学)

2022 年 6 月 28 日

RIMS 共同研究 部分多様体論と幾何解析の新展開

Contents

0. 研究の背景.
1. Riemann 多様体間の写像に対する積分不変量の定義.
2. $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数の導入とそれぞれの第一変分公式.
3. Chern–Federer エネルギー汎関数の導入とその Euler–Lagrange 方程式.

Let

- $(M^m, g_M), (N^n, g_N)$: Riemannian 多様体.
- $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$; C^∞ 級写像.

harmonic/biharmonic map

- φ が調和写像

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ はエネルギー汎関数 $E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |d\varphi|^2 d\mu_{g_M}$ の臨界点.

$\Longleftrightarrow \tau(\varphi) = \mathrm{tr}_{g_M} \nabla d\varphi = 0.$

- φ が二重調和写像

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ は二重エネルギー汎関数 $E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 d\mu_{g_M}$ の臨界点.

$\Longleftrightarrow \tau_2(\varphi) = -\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\tau(\varphi) - \mathrm{tr}_{g_M}(R^N(d\varphi(\cdot), \tau(\varphi))d\varphi(\cdot)) = 0.$

Definition (Howard 1993)

G/K: 等質空間, M: G/K の V_0 型コンパクト部分多様体.
このとき, 部分多様体 M に対し

$$I^{\mathcal{P}}(M) := \int_M \mathcal{P}(h_x^M)\, d\mu_{g_M},$$

と定める. ここで h^M は M の第二基本形式, $\mathcal{P}$ は h^M に関する不変多項式としている.

In this talk

まず, Riemann 多様体間の写像 φ に対し, 写像の第二基本形式を用いて積分不変量を定める. 次に, 二重エネルギー汎関数 $E_2(\varphi)$ を含むエネルギー汎関数の族を構成する. ここで, この族の中からいくつかのエネルギーに着目しその変分公式を導出した.

Setting

- $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n) := \left\{ H : \mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n \ ;\ \text{対称双線形形式} \right\}$,
  $G := O(m) \times O(n)$.
  $\rightsquigarrow G \curvearrowright \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall g = (a, b) \in G,\ {}^\forall H \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$
  $$(gH)(u, v) := b\big(H(a^{-1}u, a^{-1}v)\big) \qquad (u, v \in \mathbb{E}^m)$$
  $\rightsquigarrow \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 作用で不変な関数 $\mathcal{P}$ を考える.
  $$\text{i.e.} \quad \mathcal{P}(gH) = \mathcal{P}(H),\ \ {}^\forall g \in G, {}^\forall H \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$$

- $(M^m, g_M), (N^n, g_N)$: Riemann 多様体, $\varphi : M \to N$; C^∞ 写像.
- 写像 φ の第二基本形式は対称双線形形式;
  $$\widetilde{\nabla} d\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$
  であり, 次で定義される.
  $$(\widetilde{\nabla} d\varphi)(X, Y) := \overline{\nabla}_X \big(d\varphi(Y)\big) - d\varphi(\nabla_X Y) \quad (X, Y \in \Gamma(TM)).$$

各点 $x \in M$ に対し, T_xM と $\mathbb{E}^m$, $T_{\varphi(x)}N$ と $\mathbb{E}^n$ をそれぞれ同一視することで, $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ と $T_xM \odot T_xM \otimes T_{\varphi(x)}N$ の間に線形同型な対応を作ることができる.

つまり, $(\widetilde{\nabla} d\varphi)_x \in T_xM \odot T_xM \otimes T_{\varphi(x)}N$ に対し $H_x := (h^{\alpha}_{ij}) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ を対応させる. ここで

$$h^{\alpha}_{ij} = g_N\left((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x(e_i, e_j), \xi_\alpha\right)$$

としている. $\{e_i\}_{i=1}^m$ は T_xM の, $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ は $T_{\varphi(x)}N$ の正規直交基底である.

$\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 不変な関数 $\mathcal{P}$ に対し,
<u>写像 φ の第二基本形式から定まる不変関数 $\mathcal{P}$</u> を次で定める.

$$\mathcal{P}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) := \mathcal{P}(H_x)$$

Definition (写像の第二基本形式から定まる積分不変量)

(M^m, g_M): m 次元 Riemann 多様体, (N^n, g_N): n 次元 Riemann 多様体,
$\mathcal{P}$: $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 不変な関数 とする. このとき, なめらかな写像
$\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し, φ の第二基本形式から定まる積分不変量 を次で定める.

$$I^{\mathcal{P}}(\varphi) := \int_M \mathcal{P}\big((\tilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M}.$$

Remark

$I^{\mathcal{P}}(\varphi)$ は関数 $\mathcal{P}$ に関する写像 φ の不変量になっている.
実際, 任意の $f \in \mathrm{Isom}(M)$ と $g \in \mathrm{Isom}(N)$ に対し次が成り立つ.

$$I^{\mathcal{P}}(g \circ \varphi \circ f^{-1}) = I^{\mathcal{P}}(\varphi)$$

Definition (多項式 $\mathcal{Q}_1$, 多項式 $\mathcal{Q}_2$)

$H = (h^\alpha_{ij}) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し, 多項式 $\mathcal{Q}_1$と多項式 $\mathcal{Q}_2$を次で定める.

$$\mathcal{Q}_1(H) = \sum_\alpha \sum_{i,j} (h^\alpha_{ij})^2, \qquad \mathcal{Q}_2(H) = \sum_\alpha \Big(\sum_i h^\alpha_{ii} \Big)^2.$$

h^α_{ij} は $\mathbb{E}^m$ と $\mathbb{E}^n$ にそれぞれ正規直交基底を取った時の成分表示としている.

Note 多項式 $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ はそれぞれ G 不変な 2 次の斉次多項式である.

Remark

φ を Riemann 多様体間のなめらかな写像とすると次が成り立つ.

$$\mathcal{Q}_1\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) = |\widetilde{\nabla} d\varphi|^2(x), \quad \mathcal{Q}_2\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) = |\mathrm{tr}_{g_M}(\widetilde{\nabla} d\varphi)|^2(x)$$

Definition ($\mathcal{Q}_1$ 写像, $\mathcal{Q}_2$ 写像)

$\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し,
$\mathcal{Q}_1$ エネルギー汎関数と $\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数をそれぞれ次で定める.

$$I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi) = \int_M \mathcal{Q}_1\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M} = \int_M |\widetilde{\nabla} d\varphi|^2 d\mu_{g_M},$$
$$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi) = \int_M \mathcal{Q}_2\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M} = \int_M |\mathrm{tr}_{g_M}(\widetilde{\nabla} d\varphi)|^2 d\mu_{g_M}.$$

このとき, $I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi)$ の臨界点を $\mathcal{Q}_1$ 写像, $I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi)$ の臨界点を $\mathcal{Q}_2$ 写像と呼ぶ.

Note $\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数は 2 倍の二重エネルギー汎関数と一致する.

$$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi) = \int_M |\mathrm{tr}_{g_M}(\widetilde{\nabla} d\varphi)|^2 d\mu_{g_M} = \int_M |\tau(\varphi)|^2 d\mu_{g_M} = 2E_2(\varphi)$$

$\widetilde{\nabla}^2 d\varphi \in \Gamma\big(\bigotimes^3 T^*M \otimes \varphi^{-1}TN\big)$ と $\widetilde{\nabla}^3 d\varphi \in \Gamma\big(\bigotimes^4 T^*M \otimes \varphi^{-1}TN\big)$ は
それぞれ次で定義される.

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(X,Y,Z) &:= \overline{\nabla}_X\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(Y,Z)\big) - (\widetilde{\nabla} d\varphi)(\nabla_X Y, Z) \\
&\quad - (\widetilde{\nabla} d\varphi)(Y, \nabla_X Z) \\
(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(X,Y,Z,W) &:= \overline{\nabla}_X\big((\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(Y,Z,W)\big) - (\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(\nabla_X Y, Z, W) \\
&\quad - (\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(Y, \nabla_X Z, W) - (\widetilde{\nabla}^2 d\varphi)(Y, Z, \nabla_X W)
\end{aligned}
$$

ここで $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ としている.

Note $\widetilde{\nabla}^2 d\varphi$ に対し次が成り立つ.

$$
\big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(X,Y,Z) = \big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(X,Z,Y)
$$

Theorem ($\mathcal{Q}_1$ エネルギーと $\mathcal{Q}_2$ エネルギーの第一変分公式)

(M^m, g_M) をコンパクト Riemann 多様体, (N^n, g_N) を Riemann 多様体とし, $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ をなめらかな写像とする. また, $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ を変分ベクトル場 V で生成されるなめらかな変分とする. このとき次が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_i}(\varphi_t)\bigg|_{t=0} = 2\int_M \langle W_i(\varphi), V\rangle \, d\mu_{g_M} \qquad (i = 1, 2) .$$

ここで, $W_1(\varphi)$ と $W_2(\varphi)$ はそれぞれ

$$W_1(\varphi) = \sum_{i,j} \left\{ (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(e_i, e_j, e_i, e_j) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_j), d\varphi(e_i)\big) d\varphi(e_j) \right\}$$

$$W_2(\varphi) = \sum_{i,j} \left\{ (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(e_i, e_i, e_j, e_j) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) \right\}$$

で定められる. また, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場とする.

証明の概略

φ のなめらかな変分 $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ を考えることで, 次の写像 Φ が得られる.

$$\Phi : M \times I \to N,\ (x,t) \mapsto \Phi(x,t) =: \varphi_t(x) \quad \text{s.}t.\ \ \varphi_0(x) = \varphi(x) \quad ({}^\forall x \in M)$$

V で変分ベクトル場をあらわすことにする, つまり次が成り立つ.

$$V = d\Phi\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\right) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

$\{e_i\}_{i=1}^m$ で $x \in M$ の近傍 U 上の局所正規直交枠場をあらわすとると,
$\left\{e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right\}$ は $(x,t) \in M \times I$ の近傍 $U \times I$ 上の正規直交枠場となる.
このとき次が成り立つ.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i = \nabla_{e_i} \frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad (1 \leq i \leq m)$$

$\mathcal{Q}_1$ エネルギーの場合, まず

$$I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi) = \int_M \left\langle \widetilde{\nabla} d\varphi, \widetilde{\nabla} d\varphi \right\rangle d\mu_{g_M}$$
$$= \int_M \sum_{i,j} \left\langle \big(\widetilde{\nabla} d\varphi\big)(e_i, e_j), \big(\widetilde{\nabla} d\varphi\big)(e_i, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}$$

となる. ここで任意の変分 $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ に対し次が成り立つ.

$$\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi_t) = \frac{d}{dt} \int_M \sum_{i,j} \left\langle \big(\widetilde{\nabla} d\Phi\big)(e_i, e_j), \big(\widetilde{\nabla} d\Phi\big)(e_i, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}$$
$$= 2 \int_M \sum_{i,j} \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \big((\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j)\big), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}$$

このとき次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\big((\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j)\big) \\
&= \big(\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \widetilde{\nabla}_{e_i} d\Phi\big)(e_j) \\
&= \big(\widetilde{\nabla}_{e_i} \widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi\big)(e_j) - \big(\widetilde{\nabla}_{\left[e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right]} d\Phi\big)(e_j) - \left(\widetilde{R}\left(e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right) d\Phi\right)(e_j) \\
&= \big(\widetilde{\nabla}^2 d\Phi\big)\left(e_i, e_j, \frac{\partial}{\partial t}\right) - R^N\left(d\Phi(e_i), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) d\Phi(e_j)
\end{aligned}
$$

これより

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi_t) = {}& 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle \big(\widetilde{\nabla}^2 d\Phi\big)\left(e_i, e_j, \frac{\partial}{\partial t}\right), \big(\widetilde{\nabla} d\Phi\big)(e_i, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M} \\
& - 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle R^N\left(d\Phi(e_i), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) d\Phi(e_j), \big(\widetilde{\nabla} d\Phi\big)(e_i, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}
$$

となる.

Lemma

上述の設定の下, 次が成り立つ.

$$\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi) \left(e_i, e_j, \frac{\partial}{\partial t} \right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}$$
$$= \int_M \sum_{i,j} \left\langle d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), (\widetilde{\nabla}^3 d\Phi)(e_i, e_j, e_i, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}$$

この補題を先述の式に適応すると

$$\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi_t)$$
$$= 2 \int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^3 d\Phi)(e_i, e_j, e_i, e_j) + R^N \big((\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j), d\Phi(e_i) \big) d\Phi(e_j), d\Phi \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right\rangle d\mu_{g_M}$$

となる. ここで $t = 0$ とすることで $\mathcal{Q}_1$ エネルギーの第一変分公式を得る.

$\mathcal{Q}_2$ エネルギーの場合, まず

$$
\begin{aligned}
I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi) &= \int_M \left\langle \mathrm{tr}_{g_M}\left(\widetilde{\nabla} d\varphi\right), \mathrm{tr}_{g_M}\left(\widetilde{\nabla} d\varphi\right)\right\rangle d\mu_{g_M} \\
&= \int_M \sum_{i,j} \left\langle \big(\widetilde{\nabla} d\varphi\big)(e_i, e_i), \big(\widetilde{\nabla} d\varphi\big)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}
$$

となる. ここで任意の変分 $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ に対し次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi_t) &= \frac{d}{dt} \int_M \sum_{i,j} \left\langle \big(\widetilde{\nabla} d\Phi\big)(e_i, e_i), \big(\widetilde{\nabla} d\Phi\big)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M} \\
&= 2 \int_M \sum_{i,j} \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \big((\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_i)\big), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}
$$

このとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\big((\widetilde{\nabla}d\Phi)(e_i,e_i)\big)\\
&=\cdots=\big(\widetilde{\nabla}^2 d\Phi\big)\left(e_i,e_i,\frac{\partial}{\partial t}\right)-R^N\left(d\Phi(e_i),d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)d\Phi(e_i)
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi_t)&=2\int_M\sum_{i,j}\left\langle\big(\widetilde{\nabla}^2 d\Phi\big)\left(e_i,e_i,\frac{\partial}{\partial t}\right),\big(\widetilde{\nabla}d\Phi\big)(e_j,e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}\\
&\quad-2\int_M\sum_{i,j}\left\langle R^N\left(d\Phi(e_i),d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)d\Phi(e_i),\big(\widetilde{\nabla}d\Phi\big)(e_j,e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}
\end{aligned}$$

となる.

Lemma

上述の設定の下, 次が成り立つ.

$$\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}$$
$$= \int_M \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), (\widetilde{\nabla}^3 d\Phi)(e_i, e_i, e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}$$

この補題を先述の式に適応すると

$$\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi_t)$$
$$= 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^3 d\Phi)(e_i, e_i, e_j, e_j) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j), d\Phi(e_i)\big)d\Phi(e_i), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \right\rangle d\mu_{g_M}$$

となる. ここで $t = 0$ とすることで $\mathcal{Q}_2$ エネルギーの第一変分公式を得る. □

Jiang 氏の導出した二重エネルギー汎関数の第一変分公式と，
$\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数の第一変分公式を比較することで次を得た.

Proposition

$\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ を Riemann 多様体間のなめらかな写像とする.
このとき次が成り立つ.

$$-\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\tau(\varphi) = \sum_{i,j} \big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(e_i, e_i, e_j, e_j)$$

ここで $-\overline{\nabla}^*\overline{\nabla} := \sum_k \left(\overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k} - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_k}e_k}\right)$ は疎ラプラシアン，
$\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場としている.

Definition (Chern–Federer 多項式)

$H = (h_{ij}^{\alpha}) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し, 2 次の Chern–Federer 多項式を次で定める.

$$\mathrm{CF}(H) := \mathcal{Q}_2(H) - \mathcal{Q}_1(H).$$

Definition (Chern–Federer エネルギー, Chern–Federer 写像)

$\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し, Chern–Federer エネルギー汎関数を次で定める.

$$I^{\mathrm{CF}}(\varphi) = \int_M \mathrm{CF}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M}.$$

このとき, $I^{\mathrm{CF}}(\varphi)$ の臨界点をChern–Federer 写像と呼ぶ.

Definition (Willmore–Chen 多項式)

$H = (h^{\alpha}_{ij}) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し, Willmore–Chen 多項式を次で定める.

$$\mathrm{WC}(H) := m\mathcal{Q}_1(H) - \mathcal{Q}_2(H).$$

Definition (Willmore–Chen エネルギー, Willmore–Chen 写像)

$\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し, Willmore–Chen エネルギー汎関数を次で定める.

$$I^{\mathrm{WC}}(\varphi) = \int_M \mathrm{WC}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M}.$$

このとき, $I^{\mathrm{WC}}(\varphi)$ の臨界点をWillmore–Chen 写像と呼ぶ.

$\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ を C^∞ 級写像,
α と β を $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ を満たす定数とする．このとき写像 φ が

$$\alpha W_1(\varphi) + \beta W_2(\varphi) = 0$$

を満たすとき, $(\alpha\mathcal{Q}_1 + \beta\mathcal{Q}_2)$ 写像と呼ぶことにする.

$(\alpha\mathcal{Q}_1 + \beta\mathcal{Q}_2)$ 写像に対し, それぞれ以下が成り立つ.

1. φ が $\mathcal{Q}_1$ 写像 $\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (1, 0)$;
2. φ が $\mathcal{Q}_2$ 写像 $\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (0, 1)$;
3. φ が Chern–Federer 写像 $\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (-1, 1)$;
4. φ が Willmore–Chen 写像 $\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (m, -1)$.

Proposition (Chern–Federer エネルギーの Euler–Lagrange 方程式の表示)

なめらかな写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ が Chern–Federer 写像であることの必要十分条件は, 次が成り立つことである.

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i,j} \Big\{ &\big(\nabla R^N\big)\big(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) - \big(\tilde{\nabla} d\varphi\big)\big(e_i, R^M(e_i, e_j)e_j\big) \\ &- d\varphi\big((\nabla R^M)(e_i, e_i, e_j)e_j\big) + 2R^N\big((\tilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) \\ &+ 2R^N\big(d\varphi(e_i), (\tilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_j)\big) d\varphi(e_j) \Big\}. \end{aligned}$$

ここで, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場としている.

Note Chern–Federer エネルギー $I^{\mathrm{CF}}(\varphi)$ の Euler–Lagrange 方程式は, φ に関する 2 階の偏微分方程式になっていることがわかる.

先の命題の証明には次の 2 つの補題を使う.

Lemma

なめらかな写像 $\varphi : M \to N$ と $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ に対し, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(X, Y, Z) - \big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(Y, X, Z) \\
&= R^N\big(d\varphi(X), d\varphi(Y)\big)d\varphi(Z) - d\varphi(R^M(X, Y)Z)
\end{aligned}
$$

Lemma

なめらかな写像 $\varphi : M \to N$ と $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ に対し, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(X, Y, Z, W) - \big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(X, Z, Y, W) \\
&= \big(\nabla R^N\big)\big(d\varphi(X), d\varphi(Y), d\varphi(Z)\big)d\varphi(W) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(X, Y), d\varphi(Z)\big)d\varphi(W) \\
&\quad + R^N\big(d\varphi(Y), (\widetilde{\nabla} d\varphi)(X, Z)\big)d\varphi(W) + R^N\big(d\varphi(Y), d\varphi(Z)\big)(\widetilde{\nabla} d\varphi)(X, W) \\
&\quad - (\widetilde{\nabla} d\varphi)\big(X, R^M(Y, Z)W\big) - d\varphi\big((\nabla R^M)(X, Y, Z)W\big)
\end{aligned}
$$

Note Chern–Federer エネルギーは次のようにあらわすことができる.

$$
\begin{aligned}
I^{\mathrm{CF}}(\varphi) &= I^{\mathcal{Q}_2-\mathcal{Q}_1}(\varphi) \\
&= \int_M \mathcal{Q}_2\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) - \mathcal{Q}_1\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M} \\
&= \int_M \sum_\alpha \Big(\sum_i h^\alpha_{ii}\Big)^2 - \sum_\alpha \sum_{i,j} (h^\alpha_{ij})^2 d\mu_{g_M} \\
&= \int_M \sum_\alpha \sum_{i,j} \det \begin{pmatrix} h^\alpha_{ii} & h^\alpha_{ij} \\ h^\alpha_{ij} & h^\alpha_{jj} \end{pmatrix} d\mu_{g_M}.
\end{aligned}
$$

Theorem (Chern–Federer エネルギーの Euler–Lagrange 方程式の別表示)

なめらかな写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ が Chern–Federer 写像であることの必要十分条件は次が成り立つことである.

$$C(\mu + \nu) = 0,$$

ここで C は

$$C := \det \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{24} & C_{34} \end{pmatrix},$$

であり C_{ij} は縮約としている. また, μ, ν はそれぞれ以下で定められる, $\varphi^{-1}TN$ に値を持つ $(0,4)$ 型のテンソル場である.

$$\mu(X_1, X_2, X_3, X_4) := (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(X_1, X_2, X_3, X_4),$$
$$\nu(X_1, X_2, X_3, X_4) := R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(X_3, X_4), d\varphi(X_1)\big)d\varphi(X_2)$$

ただしここで $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ としている.

証明の概略

まず

$$\begin{aligned} \mu_{ijkl} &:= \mu(e_i, e_j, e_k, e_l) \\ &= \left(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\right)(e_i, e_j, e_k, e_l) \\ \nu_{ijkl} &:= \nu(e_i, e_j, e_k, e_l) \\ &= R^N\left((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_k, e_l) d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_j) \end{aligned}$$

とおく．ここで $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場としている．これより

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(e_i, e_i, e_j, e_j) - (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(e_i, e_j, e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j} \mu_{iijj} - \mu_{ijij} = \sum_{i,j} \mu_i{}^i{}_j{}^j - \mu_{ij}{}^{ij} \\ &= C_{12} C_{34}\, \mu - C_{13} C_{24}\, \mu = \det \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{24} & C_{34} \end{pmatrix} \mu \end{aligned}$$

を得る．

同様にして

$$\sum_{i,j} R^N\left((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_i), d\varphi(e_j)\right) d\varphi(e_j) - R^N\left((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_j), d\varphi(e_i)\right) d\varphi(e_j)$$

$$= \cdots = \det\begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{24} & C_{34} \end{pmatrix} \nu$$

を得る．これより

$$W_2(\varphi) - W_1(\varphi) = \det\begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{24} & C_{34} \end{pmatrix} (\mu + \nu)$$

となる． □

今後の展望について

今後の研究の方向性として以下のことを考えている.

- 変分問題の観点からの研究を更に進める.
- 写像の積分不変量の幾何的性質を明らかにする.
- 可積分系の観点から Chern–Federer 写像について研究を進める.

ご清聴いただきありがとうございました.

Reference I

[1] C. B. Allendoerfer and A. Weil, *The Gauss–Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 101–129.

[2] R. L. Bryant, *Minimal surfaces of constant curvatures in S^n*, Trans. Amer. M. S. **290** (1985), 259–271.

[3] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Geometry of hypersurfaces*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2015.

[4] B.-Y. Chen, *An invariant of conformal mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 563–564.

[5] B.-Y. Chen, *Some conformal invariants of submanifolds and their applications*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 380–385.

[6] B.-Y. Chen, *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*, World Scientific, (2011).

Reference II

[7] B.-Y. Chen, *Recent developments in δ-Casorati curvature invariants*, Turkish J. Math. **45** (2021), no. 1, 1–46.

[8] R. Howard, *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, 1993.

[9] T. Ichiyama, J. Inoguchi and H. Urakawa, *Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields*, Note Mat. **28** (2009), [2008 on verso], suppl. 1, 233–275.

[10] G. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*. Translated from the Chinese by Hajime Urakawa. Note Mat. **28** (2009), [2008 on verso], suppl. 1, 209–232.

Reference III

[11] H. J. Kang, T. Sakai and Y. J. Suh, *Kinematic formulas for integral invariants of degree two in real space forms*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), no. 5, 1499–1519.

[12] Y. Kitagawa, *Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in* S^3, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), no. 3, 457–476.

[13] Y. Kitagawa, *Isometric deformations of flat tori in the 3-sphere with nonconstant mean curvature*, Tohoku Math. J. (2) **52** (2000), no. 2, 283–298.

[14] K. Kenmotsu, *On minimal immersion of* R^2 *into* S^n, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 182–191.

[15] H. Weyl, *On the volume of tubes*, Amer. J. Math., **61** (1939), 461–472.